ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ.28

Α2. Θεωρία σχολικό σελ.14

Α3. Θεωρία σχολικό σελ.87

Α4. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Είναι,

$$P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}^2-1^2}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+x+1}+1}=$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

Άρα $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \succ 0$ με παράγωγο,

$$f'(x) = \frac{x}{3}\ln x + \frac{x}{3}(\ln x)' = \frac{1}{3}\ln x + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\ln x + 1)$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της f(x) για x=1 είναι το $f'(1) = \frac{1}{3}(0+1) = \frac{1}{3}$.

Άρα $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$.

B2. Από τον αξιωματικό ορισμό ισχύει ότι,

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$$
$$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Επίσης είναι, $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

Ισχύει ότι $\{\omega_3\} \subseteq \mathrm{A}' \Rightarrow P(\omega_3) \le P(A') \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le P(A)'$ (1)

Ισχύει επίσης ότι, $A' \subseteq \{\omega_1\}' \Leftrightarrow \{\omega_2, \omega_3\} \subseteq \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

Άρα, $P(A') \le P(\{\omega_1\}') = P(A') \le P\left[(\omega_1)'\right]$, οπότε

$P(A') \le 1 - P(\omega_1) \Leftrightarrow P(A') \le 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A') \le \frac{3}{4}$ (2)

Από τις (1) και (2) ισχύει $\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4}$.

B3. Έχουμε,

$$P(A)' = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

Άρα, $P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$

Όμως

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + P(\omega_2) + \frac{1}{3} + 0 = 1 \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

Συνεπώς $P(\omega_2) = \frac{5}{12}$.

Έχουμε,

$$P\left[\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)\right]\overset{\left(A-B\right)\cap\left(B-A\right)=\varnothing}{=}P\left(A-B\right)+P\left(B-A\right)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

Το ενδεχόμενο $A\cap B=\{\omega_1\}$, άρα $P(A\cap B)=P(\omega_1)$.

Οπότε,

$$P\left[\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)\right]=P(\omega_1)+P(\omega_4)+P(\omega_1)+P(\omega_3)-2P(\omega_1)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$

Επίσης είναι, $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$, $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$.

Άρα $A'-B'=\{\omega_3\}$

Επομένως, $P(A'-B')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ισχύει ότι, $\frac{50+3c+50+4c}{2}=85\Leftrightarrow 100+70=170\Leftrightarrow c=10$

Γ2.

Επειδή σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες ισχύει ότι στα διαστήματα [70,75] και [75,80] ανήκει το $\frac{f_3}{2}$ των παρατηρήσεων.

Η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή.

Συνεπώς είναι $\frac{f_3}{2}+f_4=0,5$ (1)

Αλλά δίνεται $f_4=2f_3$ (2)

Επομένως η (1) μέσω της (2) γίνεται

$$\frac{f_3}{2}+2f_3=0,5\Leftrightarrow f_3+4f_3=1\Leftrightarrow 5f_3=1\Leftrightarrow f_3=\frac{1}{5}=0,2$$

Άρα από τη σχέση (2) προκύπτει $f_4=2\cdot(0,2)=0,4$.

Επίσης έχουμε,

$$\bar{x}=74 \Leftrightarrow x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+x_3\cdot f_3+x_4\cdot f_4=74 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2+15+34=74 \Leftrightarrow$$
$$55f_1+65f_2=25 \Leftrightarrow 11f_1+13f_2=5 \quad (3)$$

Είναι επίσης $f_1+f_2+f_3+f_4=1 \Leftrightarrow f_1+f_2+f_3+2f_3=1 \Leftrightarrow f_1+f_2=1-2\cdot 0,2=0,6$ και άρα $f_1+f_2=0,6 \quad (4)$.

Λύνουμε το σύστημα των (3) και (4) και παίρνουμε $f_1=0,2$ και $f_4=0,4$

Έτσι ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής.

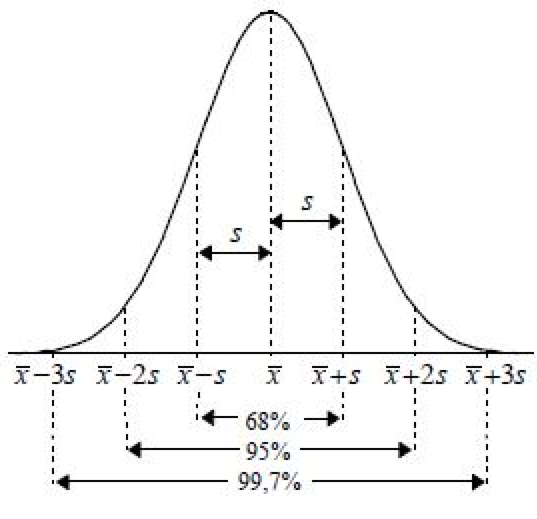
Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική συχνότητα f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολο	-	1

Γ3.

Για την μέση τιμή έχουμε,

$$\bar{x}=\frac{x_1\cdot v_1+x_2\cdot v_2+x_3\cdot v_3}{v_1+v_2+v_3}=\frac{x_1\cdot f_1\cdot v+x_2\cdot f_2\cdot v+x_3\cdot f_3\cdot v}{f_1\cdot v+f_2\cdot v+f_3\cdot v}=\frac{x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+x_3\cdot f_3}{f_1+f_2+f_3}$$
$$=\frac{5,5+19,5+15}{0,6}=\frac{40}{0,6}=\frac{400}{6}=\frac{200}{3}$$

Γ4.



Το 2,5% των παρατηρήσεων ισούται με $\frac{100-95}{2}\%$

Επειδή το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του $\bar{x}+25$ προκύπτει $\bar{x}+25=74$ (1).

Το 16% των παρατηρήσεων είναι ίσο με $\frac{100-68}{2}\%$ άρα το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες του $\bar{x}-s$.

Οπότε $\bar{x}-s=68$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\bar{x}=70$ και $s=2$.

Ο συντελεστής μεταβολής ισούται με $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{2}{70}=\frac{1}{35}<\frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$ και $f(1)=\kappa$ και $f'(1)=1$.

Τότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(1,f(1))$ είναι η:

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\kappa=x-1\Leftrightarrow y=x+\kappa-1$$

Τέμνει τον x΄x όταν $y=0\Leftrightarrow x=1-\kappa$

Τέμνει τον y΄y όταν $x=0\Leftrightarrow y=\kappa-1$

$$E=\frac{1}{2}(x_A)(y_B)=\frac{1}{2}|1-\kappa||\kappa-1|=\frac{1}{2}|\kappa-1|^2$$

Θέλουμε $E<2\Leftrightarrow|\kappa-1|^2<4\Leftrightarrow|\kappa-1|<2\Leftrightarrow-2<\kappa-1<2\Leftrightarrow-1<\kappa<3\underset{\kappa>1}{\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}}\boxed{\kappa=2}$

Δ2. α. Άρα για κ = 2 είναι η $f(x)=x\ln x+2$ και η $(\varepsilon): y=x+1\Leftrightarrow x=y-1$

Οι τιμές x_i προκύπτουν από τις y_i αν προσθέσουμε $c_1=-1$. Τότε από βασική εφαρμογή έχουμε: $\bar{x}=\bar{y}+c_1\Leftrightarrow\bar{x}=31-1\Leftrightarrow\boxed{\bar{x}=30}$

β. $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_{50}}{50}\Leftrightarrow 30\cdot 50=x_1+x_2+...+x_{50}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1+x_2+...+x_{50}=1500$ (1)

$$\bar{x}'=\frac{x_1'+x_2'+...+x_{50}'}{50}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\bar{x}'=\frac{x_1'+x_2'+...+x_{20}'+x_{21}'+...+x_{35}'+x_{30}'+...+x_{50}'}{50}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31\cdot 50=x_1+3+x_2+3+...+x_{20}+3+x_{21}+...+x_{35}+x_{30}-\lambda+...+x_{50}-\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1550=(x_1+x_2+...+x_{20})+20\cdot 30+(x_{21}+...+x_{35})+(x_{36}+x_{50})-15\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1550=(x_1+x_2+...+x_{50})+60-15\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1550 = 1500 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1560 - 1550 = 15\lambda \Leftrightarrow 10 = 15\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$$

Δ3. $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = \frac{1}{e}$ με $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} + 2 > 0$

Άρα για κάθε $x \in A_f$ το $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} + 2 > 0$.

Τα $\alpha, \beta, \gamma, e \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ με $\alpha < \beta < \gamma < e \overset{f(x)\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{e} + 2 \leq f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Όμως $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ άρα:

$$0 < -\frac{1}{e} + 2 < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Τότε $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e\ln e + 2 - 0 = e + 2$ δηλαδή $\boxed{R = e + 2}$

$$\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5}\left[f'\left(\frac{1}{e}\right) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left(0 + \alpha\ln\alpha + 2 + \beta\ln\beta + 2 + \gamma\ln\gamma + 2 + e\ln e + 2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln\alpha^{\alpha} + \ln\beta^{\beta} + \ln\gamma^{\gamma} + 6 + 2 + e\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma} + 8 + e\right) = \frac{1}{5}\left(\ln e^{7} + 8 + e\right) = \frac{1}{5}(7 + 8 + e) = \frac{15 + e}{5}$$

Άρα $\boxed{\overline{x} = \frac{15 + e}{5}}$

Δ4. $f'(t)=\varepsilon\varphi\hat{\omega} \underset{\varepsilon\varphi\hat{\omega}>0}{\overset{\hat{\omega}=90^\circ}{\Leftrightarrow}} f'(t)>0 \Leftrightarrow \ln t+1>0 \Leftrightarrow$

$\ln t>-1 \Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$ άρα $A=\{t_{11},t_{12},...,t_{30}\}$

$f(t)>f'(t)+1 \Leftrightarrow t\ln t\cancel{+2}>\ln t\cancel{+1+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\ln t-\ln t>0 \Leftrightarrow \ln t(t-1)>0$

x	0		1		$+\infty$
$t-1$		$-$	0	$+$	
$\ln t$		$-$	0	$+$	
Γινόμενο		$+$	0	$+$	

Άρα $\Gamma>0 \Leftrightarrow t\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Επομένως $B=\{t_1,t_2,...,t_{29}\}$

α) $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

β) $P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$