ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ

Σύλλογος Εκπαιδευτικών Φροντιστών Αττικής

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ.30

Α2. Θεωρία σχολικό σελ. 13

Α3. Θεωρία σχολικό σελ. 59

Α4. α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Είναι $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 6 + 8 + 12 + 14 = 40$

Β2. Έχουμε

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{12}{40} = 0,3 \,,\quad f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{8}{40} = 0,2 \,,\quad f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{14}{40} = 0,35 \,,\quad f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{6}{40} = 0,15$$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	$x_i v_i$
[2,4)	**3**	**12**	**0,3**	**36**
[4,6)	**5**	**8**	**0,2**	**40**
[6,8)	**7**	**14**	**0,35**	**98**
[8,10)	**9**	**6**	**0,15**	**54**
Σύνολο		**40**	**1**	**228**

Β3.

α) Η μέση τιμή ισούται με $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = \frac{228}{40} = 5,7$ χιλιάδες ευρώ

β) Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Επομένως στη κλάση [4,6) αντιστοιχούν 8 παρατηρήσεις και έστω στη κλάση [4,5 , 6) αντιστοιχούν x παρατηρήσεις. Τότε $\frac{2}{1,5} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$.

Επομένως οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4.5 χιλιάδων ευρώ είναι 6+14+6=26 πωλητές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 12x^2 - 7x + 1$. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0$ **(1).**

Είναι $\Delta = 1 > 0$. Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις $x_1 = \frac{7+1}{24} = \frac{1}{4}$ ή $x_2 = \frac{7-1}{24} = \frac{1}{3}$ **(**$x_1 < x_2$**).**

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης βρίσκονται από τον πίνακα που ακολουθεί,

x	$-\infty$	$1/4$		$1/3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = \frac{1}{3}$.

Επομένως είναι $P(K) = x_1 = \frac{1}{4}$ και $P(A) = x_2 = \frac{1}{3}$.

Από τον αξιωματικό ορισμό έχουμε $P(A) + P(K) + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow P(\Pi) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

Γ2. Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι,

Τα ενδεχόμενα Α και Κ είναι ασυμβίβαστα άρα

$$P(\Gamma) = P\left[(K \cup A)\right] = P(K) + P(A) = \frac{7}{12}$$

$$P(\Delta) = P\left[(K \cup A)'\right] = 1 - P(K \cup A) = \frac{5}{12}$$

Επειδή το ενδεχόμενο Δ είναι η μπάλα που επιλέγεται να μην είναι κόκκινη ούτε άσπρη, αυτό σημαίνει θα είναι πράσινη επομένως, $P(\Pi) = P(\Delta) = \frac{5}{12}$

Είναι,

$$P(\mathrm{E}) = P[\mathrm{A} \cup \Pi'] = P(\mathrm{A}) + P(\Pi') - P(\mathrm{A} \cap \Pi') = P(\mathrm{A}) + 1 - P(\Pi) - \left(P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{A} \cap \Pi)\right) \Leftrightarrow$$
$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{A}) + 1 - P(\Pi) - P(\mathrm{A}) = 1 - P(\Pi) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Γ3.

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \mathrm{N}(\Pi) - 4 \overset{:\mathrm{N}(\Omega)}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{\mathrm{N}(\Pi)}{\mathrm{N}(\Omega)} - \frac{4}{\mathrm{N}(\Omega)} \Leftrightarrow P(\mathrm{A}) = P(\Pi) - \frac{4}{\mathrm{N}(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{\mathrm{N}(\Omega)} \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{N}(\Omega) = 48$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Είναι x dm η μία πλευρά και έστω y dm η άλλη πλευρά της βάσης του ορθογωνίου. τότε $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$ (1).

Επομένως το εμβαδόν επιφάνειας του κουτιού ισούται με

$$E = 10x + 10y + xy = 10x + y(10 + x) \overset{(1)}{=} 10x + (10 - x)(10 + x) = -x^2 + 10x + 100$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = -x^2 + 10x + 100,\ \ 0 < x < 10$

Η συνάρτηση $E(x)=-x^2+10x+100$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $E'(x)=-2x+10$. Λύνουμε την εξίσωση $E'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+10=0 \Leftrightarrow x=5$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης βρίσκονται από τον πίνακα που ακολουθεί,

x	0	5	10
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	↗		↘

Επομένως το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια γίνεται μέγιστο για $x=5\ dm$

Δ2.

α) Λύνουμε την εξίσωση $s^2-5s+2=0$ (2)

Είναι $\Delta=9>0$. Επομένως η εξίσωση (2) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις $s=\frac{5+3}{4}=2$ ή $s=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$.

- Αν $s=2$ τότε ο συντελεστής μεταβολής ισούται με $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}>\frac{1}{10}$ δεκτή διότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

- Αν $s=\frac{1}{2}$ τότε ο συντελεστής μεταβολής ισούται με $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{\frac{1}{2}}{8}=\frac{1}{16}<\frac{1}{10}$ απορρίπτεται διότι το δείγμα είναι ομοιογενές σε αυτή τη περίπτωση.

β) Ο τύπος της διακύμανσης γίνεται,

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right]=\left[\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu^2}\right]=\left[\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}\right)^2\right]=\overline{x^2}-\bar{x}^2$$

Οπότε $\overline{x^2}=s^2+\bar{x}^2=4+64=68$

Δ3.

Η συνάρτηση E(x) από το πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε αφού $5=x_1<x_2<.....<x_{15}=9$ ισχύει $E(5)>E(x_2)>......>E(9)$. Άρα το εύρος των $y_i=E(x_i)$ ισούται με $R=E(5)-E(9)=125-109=16$.

Οπότε λύνουμε την ανίσωση

$E(x)>-4x+9R+1 \Leftrightarrow -x^2+10x+100>-4x+144+1 \Leftrightarrow x^2-14x+45<0$. Επομένως $5<x<9$.

Άρα το ενδεχόμενο Β είναι το $\mathrm{B}=\{(x_2,y_2),(x_3,y_3),......,(x_{14},y_{14})\}$. Επομένως σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας είναι $P(\mathrm{B})=\dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\dfrac{13}{15}$